Structure réelle-complexe

PAR RICHARD GOMEZ

mai 2012

Résumé

Ceci est un article de synthèse sur différentes situations mathématiques où l'on passe des coefficients réels aux coefficients complexes, pour ensuite revenir aux réels. On connaît tous les espaces vectoriels réels et les espaces vectoriels complexes, mais on connaît moins les espaces réels-complexes. Ce sont des espaces complexes sur lesquels on a défini une conjugaison et donc des vecteurs réels. Ces structures apparaissent naturellement lorsque l'on introduit des coordonnées complexes. Nous donnons des applications de cette notion à la diagonalisation des matrices symétriques, aux suites définies par une relation de récurrence linéaire, aux équations différentielles linéaires, et aux séries de Fourier.

1 Pour quoi introduire des coordonnées complexes ?

Il existe des situations où il est pratique d'introduire des coordonnées complexes. Par exemple lorsque l'on essaie de classifier les endomorphismes d'un espace vectoriel réel E de dimension deux. Le but d'une telle classification est de savoir si tout $f \in \mathcal{L}(E)$ admet une base dans laquelle la matrice est facile à comprendre. On cherche en quelque sorte à réduire f. C'est un problème qui ressemble à la classification des isométries du plan euclidien. On sait par exemple que toute isométrie vectorielle du plan est soit une rotation, soit une réflexion. Existe-t-il un résultat analogue sur $\mathcal{L}(E)$? Pour répondre à cette question, on calcule le spectre de f et ensuite on discute selon les cas possibles. Soit $e = (e_1, e_2)$ une base de E. On note

$$\underset{e}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le cas qui pose problème est celui où le polynome caractéristique de f n'a pas de racines réelles. Ce polynome étant de degré deux, ses racines sont deux nombres complexes non réels conjugués, $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. Si E n'était pas réel mais complexe, on aurait

$$E = \{x_1\, e_1 + x_2\, e_2\, ; x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}$$

et

$$f \ : \ x_1\, e_1 + x_2\, e_2 \ \longmapsto \ (a x_1 + b x_2)\, e_1 + (c x_1 + d x_2)\, e_2$$

où x_1 et x_2 prennent des valeurs complexes. On sait grâce à l'algèbre linéaire que dans ce cas f serait diagonalisable puisqu'elle possède deux valeurs propres distinctes. Ceci signifie qu'il existe une $\mathbb{C}$-base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de E telle que

$$\mathrm{mat}\, f = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$$

Autrement dit : il existe un système de coordonnées (y_1, y_2) telles que

$$f \ : \ y_1\, \varepsilon_1 + x_2\, \varepsilon_2 \ \longmapsto \ (\alpha + i\beta)\, y_1\, \varepsilon_1 + (\alpha - i\beta)\, y_2\, \varepsilon_2 \tag{1}$$

Malheureusement, dans le cas qui nous intéresse, c'est à dire le cas où E est réel, f ne peut pas s'écrire comme dans (1). Nous verrons dans cet article que le fait d'écrire « le passage aux coordonnées complexes » de manière formelle nous permettra de donner du sens à (1) et par voie de conséquence, d'en savoir plus sur f.

2 Complexification

2.1 Complexification d'un espace vectoriel réel

Définition 1. *Soit E un espace vectoriel réel. La complexification de E est l'espace vectoriel complexe*

$$E_{\mathbb{C}} = E \times E$$

où

1. *l'addition est définie par*

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

2. *la multiplication externe est définie par*

$$(x+iy)\,(a,b) = (xa - yb, xb + ya) \tag{2}$$

Remarque 2. C'est pour alléger le texte que nous avons évité de préciser que a, b, c, d sont des éléments quelconques de E et x, y des éléments quelconques de $\mathbb{R}$. D'ailleurs le contexte ne laisse aucune ambigüité.

Remarque 3. On laisse au lecteur le soin de vérifier que :

- Les deux opérations ainsi définies confèrent bien à $E \times E$ une structure d'espace vectoriel complexe.
- La structure réelle sous-jacente coïncide avec la structure naturelle d'espace vectoriel réel du produit $E \times E$.

Il s'ensuit, dans le cas où E est de dimension finie, que la dimension réelle de $E_{\mathbb{C}}$ est le double de la dimension de E, et donc

$$\dim_{\mathbb{C}} E_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} E$$

Remarque 4. On aurait pu définir l'espace vectoriel complexe $E_{\mathbb{C}}$ en disant que c'est l'espace vectoriel réel $E \times E$ où on pose

$$i \cdot (a,b) = (-b, a)$$

La règle (2) découle alors de cette formule et de la distributivité de l'addition de $\mathbb{C}$ sur la multiplication externe.

Par la suite, on identifiera toujours $E \times \{0\}$ à E. On a alors

$$\begin{aligned} iE &= \{i\,(a,0)\,; a \in E\} \\ &= \{(0,a)\,; a \in E\} \\ &= \{0\} \times E \end{aligned}$$

Cette identification faite, on peut dire que E et iE sont des $\mathbb{R}$-sous espaces vectoriels de $E_{\mathbb{C}}$. On a même la

Proposition 5. *Soit E un espace vectoriel réel. Alors $E_{\mathbb{C}}$, en tant qu'espace vectoriel réel est somme directe de E et iE :*

$$E_{\mathbb{C}} = E \oplus_{\mathbb{R}} iE$$

Ainsi, pour tout $u \in E_{\mathbb{C}}$, il existe un couple unique $(a,b) \in E \times E$ tel que

$$u = a + ib \tag{3}$$

Remarque 6. L'égalité $E_{\mathbb{C}} = E \oplus_{\mathbb{R}} iE$ généralise $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus_{\mathbb{R}} i\mathbb{R}$.

Exemple 7. Reprenons l'exemple de la section précèdente : E est un espace vectoriel réel de dimension 2 et $e = (e_1, e_2)$ est une base de E. Nous avons alors considéré les $\mathbb{C}$-combinaisons linéaires $z_1\, e_1 + z_2\, e_2$ sans préciser leur signification. Nous allons voir qu'introduire de telles combinaisons linéaires revient à introduire $E_{\mathbb{C}}$. Nous savons que $E_{\mathbb{C}} = E \oplus_{\mathbb{R}} i\,E$, ainsi, tout élément de $E_{\mathbb{C}}$ s'écrit

$$\begin{aligned} u &= a + i\,b \\ &= (a_1\, e_1 + a_2\, e_2) + i\,(b_1\, e_1 + b_2\, e_2) \\ &= (a_1 + i\,b_1)\, e_1 + (a_2 + i\,b_2)\, e_2 \end{aligned}$$

C'est une $\mathbb{C}$-combinaison linéaire en e_1 et e_2. La réciproque est évidente. Introduire $E_{\mathbb{C}}$ revient donc à accepter que les coordonnées soient complexes.

Définition 8. *Soient E un espace vectoriel réel et $u \in E_{\mathbb{C}}$. On sait alors que u s'écrit de manière unique $u = a + i\,b$ avec $a, b \in E$. On dit que*

- *a est la partie réelle de u ; on la note $r(u)$;*
- *b est la partie imaginaire de u ; on la note $\jmath(u)$;*
- *$a - i\,b$ est le conjugué de u ; on le note $\mathrm{conj}(u)$ ou $\bar{u}$.*

Remarque 9. La décomposition $u = a + i\,b$ (3) peut s'écrire

$$u = r(u) + i\,\jmath(u)$$

et le conjugué

$$\mathrm{conj}(u) = r(u) - i\,\jmath(u)$$

Remarque 10. Les applications $r : E_{\mathbb{C}} \to E$, $\jmath : E_{\mathbb{C}} \to E$ et $\mathrm{conj} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ ainsi définies sont $\mathbb{R}$-linéaires. L'application r est la projection de $E_{\mathbb{C}}$ sur E parallèlement à $i\,E$. L'application $i\,\jmath$ (et non pas $\jmath$) est la projection de $E_{\mathbb{C}}$ sur $i\,E$ parallèlement à E. La conjugaison est la symétrie par rapport à E parallèlement à $i\,E$.

On laisse au lecteur le soin de démontrer les identités

$$r(u) = \frac{u + \mathrm{conj}(u)}{2}$$

et

$$\jmath(u) = \frac{u - \mathrm{conj}(u)}{2i}$$

Définition 11. *Soient E un espace vectoriel réel et $u \in E_{\mathbb{C}}$. On dit que u est réel si $u \in E$. On dit que u est imaginaire pur si $u \in iE$. On dit que E est la partie réelle de $E_{\mathbb{C}}$ et iE la partie imaginaire pure.*

En d'autres termes, u est réel si et seulement si $r(u) = u$, c'est à dire si et seulement si $\mathrm{conj}(u) = u$. De même, u est imaginaire pur si et seulement si $u = i\,\jmath(u)$, c'est à dire si et seulement si $\mathrm{conj}(u) = -u$.

Proposition 12. *Soit E un espace vectoriel réel. Alors toute base de E est une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$ (c'est même une $\mathbb{C}$-base réelle, dans le sens où tous ses éléments sont réels).*

Démonstration. Soient $e = (e_j\,;\, j \in J)$ une base de E et $u \in E_{\mathbb{C}}$. Alors $u = a + ib$ avec $a, b \in E$. Les éléments a et b se développent dans e :

$$a = \sum_{j \in J} a_j\, e_j$$

et

$$b = \sum_{j \in J} b_j\, e_j$$

(les a_j et b_j sont réels). On en déduit

$$u = \sum_{j \in J} (a_j + i b_j)\, e_j$$

ce qui prouve que e est $\mathbb{C}$-génératrice dans $E_{\mathbb{C}}$. Montrons qu'elle est $\mathbb{C}$-libre. On suppose qu'il existe des nombres complexes z_j tels que

$$\sum_{j \in J} z_j\, e_j = 0$$

On note x_j la partie réelle de z_j et y_j la partie imaginaire. L'égalité précédente s'écrit alors

$$\sum_{j \in J} x_j\, e_j + i \sum_{j \in J} y_j\, e_j = 0$$

d'où

$$\sum_{j \in J} x_j\, e_j = \sum_{j \in J} y_j\, e_j = 0$$

ce qui implique

$$(x_j) = (y_j) = (0)$$

puisque e est $\mathbb{R}$-libre. □

2.2 Complexification d'une application $\mathbb{R}$-linéaire

Définition 13. *Soient E, F des espaces vectoriels réels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F. Alors la complexifiée de f est l'application*

$$f_{\mathbb{C}} \ : \ \begin{array}{rcl} E_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & F_{\mathbb{C}} \\ a + i b & \longmapsto & f(a) + i f(b) \end{array}$$

Remarque 14. Nous avons écrit : « f application linéaire » car il n'y a aucune ambigüité, il s'agit forcément de $\mathbb{R}$-linéarité.

Proposition 15. *Soient E, F des espaces vectoriels réels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $f_{\mathbb{C}}$ est la seule application $\mathbb{C}$-linéaire de $E_{\mathbb{C}}$ vers $F_{\mathbb{C}}$ qui prolonge f.*

Démonstration. Le fait que $f_{\mathbb{C}}$ soit additive et $\mathbb{R}$-homogène ne pose aucune difficulté. Montrons que $f_{\mathbb{C}}(i u) = i f_{\mathbb{C}}(u)$. On décompose u en $u = a + i b$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathbb{C}}(i u) & = & f_{\mathbb{C}}(i a - b) \\ & = & i f(a) - f(b) \\ & = & i\,(f_{\mathbb{C}}(a + i f(b))) \\ & = & i f_{\mathbb{C}}(u) \end{array}$$

ce qui prouve que $f_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. C'est clairement un prolongement de f. Soit g un autre prolongement $\mathbb{C}$-linéaire de f à $E_{\mathbb{C}}$ tout entier. On a alors

$$g(a + i b) = g(a) + i g(b)$$

par $\mathbb{C}$-linéairité, c'est à dire

$$g(a + i b) = f(a) + i f(b) = f_{\mathbb{C}}(a + i b)$$

d'où $g = f_{\mathbb{C}}$. □

Exemple 16. A la section 1 pour étudier $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$f \ : \ x_1\, e_1 + x_2\, e_2 \ \longmapsto \ (a x_1 + b x_2)\, e_1 + (c x_1 + d x_2)\, e_2$$

où $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, nous avons introduit

$$\tilde{f} \ : \ z_1\, e_1 + z_2\, e_2 \ \longmapsto \ (a z_1 + b z_2)\, e_1 + (c z_1 + d z_2)\, e_2$$

où $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On vérifie aisément que $\tilde{f}$ est le compléxifié de f.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où E et F sont des espaces vectoriels réels de dimension finie. On munit E d'une base e et F d'une base ε. Nous savons alors que e est une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$, et que ε est une $\mathbb{C}$-base de $F_{\mathbb{C}}$. Soit f une application linéaire de E vers F. Nous savons que f possède une matrice dans les bases e, ε. D'un autre côté, nous savons que $f_{\mathbb{C}}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire de $E_{\mathbb{C}}$ vers $F_{\mathbb{C}}$, et on peut se demander qu'elle est sa matrice dans les bases e, ε. La réponse est facile à trouver :

Proposition 17. *Soient E, F des espaces vectoriels réels de dimension finie, e, ε des bases de E, F, respectivement, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors la matrice de f dans les bases e, ε et la matrice de $f_{\mathbb{C}}$ dans les bases e, ε coïncident :*

$$\operatorname*{mat}_{e,\varepsilon} f = \operatorname*{mat}_{e,\varepsilon} f_{\mathbb{C}}$$

Ceci montre au passage que la matrice de l'application $\mathbb{C}$-linéaire $f_{\mathbb{C}}$ écrite dans des bases réelles ne possède que des coefficients réels. On aurait envie de dire que $f_{\mathbb{C}}$ est réelle.

Exemple 18. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ défini par

$$\operatorname*{mat}_{e} f = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où e désigne la base canonique. D'après ce qui précède, f n'est le complexifié d'aucun endormophisme de $\mathbb{R}^2$.

La définition 29 éclaircira cette situation (et on aura le droit de dire que $f_{\mathbb{C}}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire réelle).

2.3 Complexification d'un espace vectoriel euclidien

On commence par un rappel :

Définition 19. *(Rappel) Soient A, B des espaces vectoriels complexes et $g: A \to B$. On dit que g est semi-linéaire si pour tous $u, v \in A$ on a $g(u+v) = g(u) + g(v)$ (additivité) et pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in A$ on a $g(\lambda u) = \bar{\lambda}\, g(u)$.*

Cela ressemble à la linéarité si ce n'est que l'homogénéité est mise en défaut : le scalaire en « sortant » se transforme en son conjugué.

Soient E un espace euclidien (c'est à dire un espace vectoriel réel de dimension finie n muni d'un produit scalaire) et e une base orthonormée de E. Alors le produit scalaire $\langle u, v\rangle$ de $u, v \in E$ s'écrit

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j\, v_j$$

où (u_j) et (v_j) sont les coordonnées respectives de u et v dans e. Il est naturel d'étendre ce produit à $E_{\mathbb{C}}$ en posant

$$\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{j=1}^{n} \bar{u_j}\, v_j \tag{4}$$

Le lecteur vérifiera que :

- Quand on restreint le produit $\langle \bullet, \bullet\rangle_{\mathbb{C}}$ aux vecteurs de E, on retrouve le produit initial $\langle \bullet, \bullet\rangle$.
- Le produit $\langle \bullet, \bullet\rangle_{\mathbb{C}}$ est bien un produit scalaire hermitien (ie. produit scalaire sur un espace vectoriel complexe).

Nous verrons que $\langle \bullet, \bullet\rangle_{\mathbb{C}}$ est le seul produit scalaire sur $E_{\mathbb{C}}$ prolongeant celui de E (contrairement aux apparences, le produit ainsi obtenu ne dépend pas du choix de la base orthonormée e).

Remarque 20. (Rappel) Cet article suit la définition suivante : un produit scalaire hermitien est une forme $\varphi(\bullet, \bullet)$ sesquilinéaire (à gauche), hermitienne et définie positive. Sesquilinéaire (à gauche) signifie que φ est semi-linéaire par rapport à la première variable, et linéaire par rapport à la deuxième. Hermitienne signifie que $\varphi(v, u) = \overline{\varphi(u, v)}$. Définie positive signifie que $u \neq 0$ implique $\varphi(u, u) > 0$.

Proposition 21. *Soient E un espace euclidien. Alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (u, v) & \longmapsto & \langle u, v\rangle_{\mathbb{C}} \end{array}$$

définie par

$$\langle a + i\, b, c + i\, d\rangle_{\mathbb{C}} = (\langle a, c\rangle + \langle b, d\rangle) + i\, (\langle a, d\rangle - \langle b, c\rangle)$$

est le seul produit scalaire sur $E_{\mathbb{C}}$ qui prolonge le produit scalaire de E.

Remarque 22. C'est pour alléger le texte que nous avons évité de préciser que a, b, c, d sont des éléments quelconques de E et que $\langle \bullet, \bullet\rangle$ désigne le produit scalaire sur E. D'ailleurs le contexte ne laisse aucune ambigüité.

Démonstration. Montrer que $\langle \bullet, \bullet\rangle_{\mathbb{C}}$ est un produit scalaire ne pose aucune difficulté (même si c'est un peu fastidieux à écrire). Le fait qu'il prolonge le produit $\langle \bullet, \bullet\rangle$ initial est évident. Nous ne montrerons donc que l'unicité. Soit φ un produit scalaire sur $E_{\mathbb{C}}$ prolongeant $\langle \bullet, \bullet\rangle$. Soient a, b, c, $d \in E$. La sesquilinéarité de φ implique alors

$$\begin{array}{rcl} \varphi(a + i\, b, c + i\, d) & = & \varphi(a, c) + i\, \varphi(a, d) + \bar{i}\, \varphi(b, c) + \bar{i}\, i\, \varphi(b, d) \\ & = & \langle a, c\rangle + i\, \langle a, d\rangle - i\, \langle b, c\rangle + \langle b, d\rangle \\ & = & \langle a + i\, b, c + i\, d\rangle_{\mathbb{C}} \end{array}$$

d'où le résultat. □

Nous savons que si e est une base orthonormée de E, alors c'est aussi une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$, et il est facile de voir que $\langle \bullet, \bullet\rangle_{\mathbb{C}}$ vérifie la formule (4).

Définition 23. *Soit E un espace vectoriel euclidien. Le produit scalaire canonique sur $E_{\mathbb{C}}$ est l'unique produit scalaire sur $E_{\mathbb{C}}$ prolongeant le produit scalaire de E.*

La défintion ci-dessous est légitime :

Définition 24. *Le complexifié d'un espace vectoriel euclidien est l'espace hermitien obtenu en complexifiant la structure linéaire sous-jacente et en la munissant du produit scalaire canonique.*

Remarque 25. Il y a un moyen plus direct de se convaincre que le produit (4) définit le seul produit scalaire de $E_{\mathbb{C}}$ prolongeant celui de E. On invite pour cela le lecteur à établir le résultat suivant : *Soient C un espace vectoriel complexe et ε une base de C. Alors il existe un et un unique produit scalaire sur C pour lequel ε est une base orthonormée*. Ce résultat est également vrai dans le cas réel. Revenons à E et sa base orthonormée e. Si φ est un produit scalaire sur $E_{\mathbb{C}}$ prolongeant $\langle \bullet, \bullet\rangle$, alors e est, d'après ce que nous venons de rappeler, une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$ orthonormée pour le produit φ...

3 Structure réelle-complexe

Le complexifié $E_{\mathbb{C}}$ de E n'est pas un espace vectoriel complexe comme les autres, il possède un petit quelque chose en plus. En effet, il y a dans $E_{\mathbb{C}}$ une conjugaison, des éléments réels et des éléments imaginaires purs.

Définition 26. *Structure réelle-complexe.*

1. *Soit G un espace vectoriel complexe. Une structure réelle-complexe sur G est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel R tel que*

$$G = R \oplus_{\mathbb{R}} i R$$

2. *Un espace vectoriel réel-complexe est un espace vectoriel complexe G muni d'une structure réelle-complexe R. On le note (G,R). On dit que R est la partie réelle de G. On dit que les éléments de R sont les éléments réels de G. On dit que $i\,R$ est la partie imaginaire pure de G. On dit que les éléments de $i\,R$ sont les imaginaires purs de G.*

On a clairement

$$\dim_{\mathbb{C}} G = \dim_{\mathbb{R}} R$$

Exemple 27.

1. Le complexifié $E_{\mathbb{C}}$ d'un espace réel E possède une structure naturelle d'espace réel-complexe : c'est E.
2. $(\mathbb{C},\mathbb{R})$ est un espace réel-complexe.
3. Si $n\in\mathbb{N}^*$, $(\mathbb{C}^n,\mathbb{R}^n)$ est un espace réel-complexe.
4. Soit J un ensemble. L'espace $\mathbb{C}^J$ des fonctions de J vers $\mathbb{C}$ possède une structure réelle-complexe naturelle, à savoir $\mathbb{R}^J$. Les éléments réels de $(\mathbb{C}^J,\mathbb{R}^J)$ sont les fonctions à valeurs réelles.
5. On note $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace vectoriel complexe des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Il est clair que $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une structure réelle-complexe de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On utilise cette structure dans la théorie de Fourier.

Définition 28. *Soient (G,R) un espace vectoriel réel-complexe et $u\in G$. On définit les applications $\mathbb{R}$-linéaires*

$$r\ :\ G\longrightarrow R$$

$$\jmath\ :\ G\longrightarrow R$$

et

$$\mathrm{conj}\ :\ G\longrightarrow G$$

comme dans $E_{\mathbb{C}}$. On dit que $r(u)$ est la partie réelle de u, $\jmath(u)$ sa partie imaginaire et $\mathrm{conj}(u)$ que l'on note aussi $\bar{u}$, son connjugué.

Définition 29. *Soient (G_1,R_1), (G_2,R_2) des espaces vectoriels réels-complexes et $f\colon G_1\to G_2$ une application $\mathbb{C}$-linéaire. On dit que f est un morphisme d'espaces réels-complexes si $f(R_1)\subset R_2$. On dit aussi que f est une application $\mathbb{C}$-linéaire réelle.*

Cette définition nous permet de dire rigoureusement si deux espaces réels-complexes sont « les mêmes » du point de vue structurel : on dit que deux espaces réels-complexes sont isomorphes s'il existe un isomorphisme réel de l'un sur l'autre.

Exemple 30.

1. Si $n\in\mathbb{N}^*$, le compléxifié de $\mathbb{R}^n$ est canoniquement isomorphe à $(\mathbb{C}^n,\mathbb{R}^n)$.
2. Le complexifié de $\mathbb{R}^J$ est canoniquement isomorphe à $(\mathbb{C}^J,\mathbb{R}^J)$.
3. Le complexifié de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est canoniquement isomorphe à $(\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}))$.
4. Tout espace réel-complexe (G,R) est canoniquement isomorphe à $(R_{\mathbb{C}},R)$.

Proposition 31. *Soient E, F des espaces vectoriels réels et $f\colon E_{\mathbb{C}}\to F_{\mathbb{C}}$ une application $\mathbb{C}$-linéaire réelle. Alors $f_{|E}$ est à valeurs dans F et sa complexifiée est f. Réciproquement, si $g\colon E\to F$ est $\mathbb{R}$-linéaire, alors sa complexifiée $g_{\mathbb{C}}$ est réelle.*

Démonstration. Par définition $f_{|E}$ est à valeur dans F et sa complexifiée est son extension $\mathbb{C}$-linéaire à $E_{\mathbb{C}}$, donc c'est f (par unicité). La complexifiée $g_{\mathbb{C}}$ de g est une extension de g, donc $g_{\mathbb{C}}(E)\subset F$, ce qui signifie que $g_{\mathbb{C}}$ est réelle. □

4 Bases et matrices

Etant donné que les éléments de R sont les éléments réels de (G, R), on dit d'une base de G qu'elle est réelle si elle se compose exclusivement d'éléments réels.

Proposition 32. *Soient (G, R) un espace réel-complexe, $\mathcal{B} = (e_j\,;\, j \in J)$ une base réelle de G, et $u \in G$. On note*

$$u = \sum_{j \in J} u_j\, e_j$$

Alors

$$r(u) = \sum_{j \in J} \mathrm{Re}(u_j)\, e_j$$

$$\jmath(u) = \sum_{j \in J} \mathrm{Im}(u_j)\, e_j$$

et

$$\mathrm{conj}(u) = \sum_{j \in J} \bar{u_j}\, e_j$$

Ainsi u est réel si et seulement si les coordonnées de u dans la base réelle $\mathcal{B}$ sont réelles.

Démonstration. Pour tout $j \in J$, notons respectivement a_j et b_j les parties réelle et imaginaire de u :

$$u_j = a_j + i b_j$$

On a alors

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j \in J} (a_j + i b_j)\, e_j \\ &= \sum_{j \in J} a_j\, e_j + i \sum_{j \in J} b_j\, e_j \end{aligned}$$

où il est clair que $\sum_{j \in J} a_j\, e_j$ et $\sum_{j \in J} b_j\, e_j$ sont des éléments réels. Il s'ensuit, par unicité de la décomposition $u = r(u) + i\jmath(u)$ que

$$r(u) = \sum_{j \in J} a_j\, e_j$$

et

$$\jmath(u) = \sum_{j \in J} b_j\, e_j$$

d'où les deux premières formules. De plus on a

$$\begin{aligned} u &= r(u) - i\jmath(u) \\ &= \sum_{j \in J} a_j\, e_j - i \sum_{j \in J} b_j\, e_j \\ &= \sum_{j \in J} (a_j - i b_j)\, e_j \end{aligned}$$

d'où la troisième formule. La dernière assertion est maintenant évidente. □

Proposition 33. *Soient (G, R) un espace réel-complexe. On a les équivalences*

i. $\mathcal{B}$ est une $\mathbb{R}$-base de R.

ii. $\mathcal{B}$ est une base réelle de (G, R).

Démonstration. Identifions $(G,\, R)$ à $(R_{\mathbb{C}},\, R)$. Si $\mathcal{B}$ est une $\mathbb{R}$-base de R alors d'après la proposition 12, c'est une $\mathbb{C}$-base de G. Réciproquement, soit $\mathcal{B} = (e_j\,;\, j \in J)$ une base réelle de $(G,\, R)$. Alors $\mathcal{B}$ est une famille d'éléments de R. Le fait que $\mathcal{B}$ soit $\mathbb{C}$-libre implique qu'elle est $\mathbb{R}$-libre. Le fait que $\mathcal{B}$ soit une base réelle de G implique que tout élément de R s'écrit comme une $\mathbb{R}$-combinaison linéaire en les éléments e_j, d'où le résultat. □

On notera que pour définir une structure réelle-complexe dans un espace complexe G, il suffit de choisir une $\mathbb{C}$-base $\mathcal{B}$, on pose alors

$$R = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\langle \mathcal{B} \rangle$$

(le $\mathbb{R}$-sous espace vectoriel de G engendré par $\mathcal{B}$).

Proposition 34. *Soient G un espace vectoriel complexe et $a, b \in G$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. La famille (a, b) est libre.

ii. La famille $(a + b, a - b)$ est libre.

Démonstration. La matrice de $(a + b, a - b)$ dans (a, b) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est -2, ainsi, (a, b) est libre si et seulement si $(a + b, a - b)$ est libre. □

Proposition 35. *Soient (G, R) un espace réel-complexe et $\varepsilon \in G$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. La famille $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ est $\mathbb{C}$-libre.

ii. La famille $(r(\varepsilon), \jmath(\varepsilon))$ est $\mathbb{C}$-libre.

Démonstration. On sait que $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ est $\mathbb{C}$-libre si et seulement si $(\varepsilon + \bar{\varepsilon}, \varepsilon - \bar{\varepsilon})$ est $\mathbb{C}$-libre. Or cette dernière est $\mathbb{C}$-libre si et seulement si $\left(\frac{\varepsilon + \bar{\varepsilon}}{2}, \frac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}{2i}\right)$ est libre. Cette dernière n'est autre que $(r(\varepsilon), \jmath(\varepsilon))$. □

Proposition 36. *Soient (G, R) un espace réel-complexe de dimension 2 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base réelle de (G, R). Soit $\varepsilon \in G$ un élément dont les coordonnées $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ dans $\mathcal{B}$ ne sont pas nulles. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

i. Les arguments de ε_1 et ε_2 sont différents modulo π.

ii. La famille $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ est $\mathbb{C}$-base de G.

iii. La famille $(r(\varepsilon), \jmath(\varepsilon))$ est une base réelle de G.

Démonstration. La matrice de $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ dans $\mathcal{B}$ est

$$\operatorname*{mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon, \bar{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \bar{\varepsilon_1} \\ \varepsilon_2 & \bar{\varepsilon_2} \end{pmatrix}$$

Son déterminant est

$$D = \varepsilon_1 \bar{\varepsilon_2} - \varepsilon_2 \bar{\varepsilon_1}$$

et D est nul si et seulement si $\varepsilon_1 \bar{\varepsilon_2}$ est réel. Il suffit d'écrire $\varepsilon_1 = r_1 e^{i\alpha}$ et $\varepsilon_2 = r_2 e^{i\beta}$ pour établir que $D = 0$ si et seulement si les arguments de ε_1 et ε_2 sont égaux moldulo π. Ceci prouve l'équivalence entre (i) et (ii). L'équivalence entre (ii) et (iii) découle de la proposition précèdente. □

On dit que $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ est une base auto-conjuguée de (G, R).

Exemple 37. On reprend l'exemple de la section 1 : E est un plan vectoriel réel. D'après la proposition, si e vérifie la condition (i), alors $(e, \bar{e})$ est une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$ et mieux encore, $(r(e), \jmath(e))$ est une $\mathbb{C}$-base réelle de $E_{\mathbb{C}}$. On en déduit que $(r(e), \jmath(e))$ est une base de E.

Proposition 38. *Soient (G, R) un espace réel-complexe de dimension 2, ε un élément de G tel que $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ soit une $\mathbb{C}$-base et $u \in G$. Alors u est réel si et seulement si les coordonnées de u dans $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ sont conjuguées.*

Démonstration. Supposons que u est réel. Notons

$$u = z_1\,\varepsilon + z_2\,\bar{\varepsilon}$$

En conjugant cette égalité on obtient

$$u = \bar{z}_1\,\bar{\varepsilon} + \bar{z}_2\,\varepsilon$$

d'où, par identification $z_1 = \bar{z}_2$. Réciproquement, on suppose que u s'écrit

$$u = z\varepsilon + \bar{z}\,\bar{\varepsilon}$$

En conjugant on trouve

$$\bar{u} = \bar{z}\,\bar{\varepsilon} + z\varepsilon$$

ce qui prouve que $u = \bar{u}$, autrement dit que u est réel. □

Exercice 1. On reprend les hypothèses de cette proposition. Calculer la matrice de passage de $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ vers $(r(\varepsilon), \jmath(\varepsilon))$ et son inverse. On note (z_1, z_2) et (x, y) les coordonnées de u dans $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ et $(r(\varepsilon), \jmath(\varepsilon))$, respectivement. Exprimer (x, y) en fonction de (z_1, z_2) et vice et versa.

Proposition 39. *Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et ε un élément de $E_{\mathbb{C}}$ tel que $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ soit une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$. Alors $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ est orthogonale si et seulement si $(r(\varepsilon), \jmath(\varepsilon))$ est orthogonale.*

Démonstration. On a

$$\underset{(r(\varepsilon), \jmath(\varepsilon))}{\operatorname{mat}} (\varepsilon, \bar{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

et les deux colonnes de cette matrice sont orthogonales dans $\mathbb{C}^2$, d'où le résultat. □

Remarque 40.

1. Si on préfère raisonner avec une matrice unitaire, on normalise les deux famille, c'est à dire on remplace les vecteurs ε, $\bar{\varepsilon}$, $r(\varepsilon)$ et $\jmath(\varepsilon)$ par $\varepsilon/\|\varepsilon\|$, $\bar{\varepsilon}/\|\bar{\varepsilon}\|$, $r(\varepsilon)/\|r(\varepsilon)\|$ et $\jmath(\varepsilon)/\|\jmath(\varepsilon)\|$. On vérifie facilement que la matrice de $(\varepsilon/\|\varepsilon\|, \bar{\varepsilon}/\|\bar{\varepsilon}\|)$ dans $(r(\varepsilon)/\|r(\varepsilon)\|, \jmath(\varepsilon)/\|\jmath(\varepsilon)\|)$ est unitaire.

2. On aurait pu démontrer cette équivalence à partir de l'égalité

$$\langle \varepsilon, \bar{\varepsilon} \rangle = \|r(\varepsilon)\|^2 - \|\jmath(\varepsilon)\|^2 + 2i\, \langle r(\varepsilon), \jmath(\varepsilon) \rangle$$

D'après cette égalité, si $\langle \varepsilon, \bar{\varepsilon} \rangle = 0$, on a forcément $\langle r(\varepsilon), \jmath(\varepsilon) \rangle = 0$, car ce dernier est un nombre réel. Réciproquement, si $\langle r(\varepsilon), \jmath(\varepsilon) \rangle = 0$, on a $\langle \varepsilon, \bar{\varepsilon} \rangle = 0$, car ce dernier est forcément un nombre complexe non réel. Le fait que ce soit un nombre non réel est dû au fait que $(\varepsilon, \bar{\varepsilon})$ est une base.

Regardons maintenant les endomorphismes. Si f est un application $\mathbb{C}$-linéaire d'un espace réel-complexe vers un autre, l'application $u \mapsto \overline{f(u)}$ est semi-linéaire. Pour obtenir une application linéaire, le plus simple est de considérer $u \mapsto \overline{f(\bar{u})}$. On verra que cela équivaut à conjuguer les coefficients de la matrice de f dans une base réelle.

Définition 41. *Soient G_1,G_2 des espaces vectoriels réels-complexes et $f: G_1 \to G_2$ une application $\mathbb{C}$-linéaire. On définit le conjugué de f par*

$$\bar{f}\,(u) = \operatorname{conj}(f(\operatorname{conj}(u)))$$

Si $e = (e_j\,; j \in J)$ et $\varepsilon = (\varepsilon_i\,; i \in I)$ sont des bases de G_1 et G_2, respectivement alors on note

$$f(e_j) = \sum_{i \in I} a_{ij}\, \varepsilon_i$$

et par définition, la matrice de f dans ces bases est la famille $(a_{ij}\,; i \in I, j \in J)$. Lorsque I et J sont finis, on présente cette famille sous la forme d'un tableau à $|I|$ lignes et $|J|$ colonnes.

Proposition 42. *Soient G_1,G_2 des espaces vectoriels réels-complexes et $f\colon G_1 \to G_2$ une application $\mathbb{C}$-linéaire. Alors $\bar{f}$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire et sa matrice dans des bases réelles s'obtient en conjugant la matrice de f dans ces mêmes bases.*

Démonstration. La linéarité de $\bar{f}$ est triviale. Soient $e = (e_j\,;\, j \in J)$ et $\varepsilon = (\varepsilon_i\,;\, i \in I)$ des bases réelles de G_1 et G_2, respectivement. Soit $(a_{ij}\,;\, i \in I, j \in J)$ la matrice de f dans ces bases. Alors

$$\begin{aligned}\bar{f}\,(e_j) &= \mathrm{conj}(f(\mathrm{conj}(e_j)))\\ &= \mathrm{conj}(f(e_j))\\ &= \mathrm{conj}\left(\sum_{i \in I} a_{ij}\,\varepsilon_i\right)\\ &= \sum_{i \in I} \overline{a_{ij}}\,\bar{\varepsilon_i}\\ &= \sum_{i \in I} \overline{a_{ij}}\,\varepsilon_i\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 43. *Soient G_1,G_2 des espaces vectoriels réels-complexes et $f\colon G_1 \to G_2$ une application $\mathbb{C}$-linéaire. On a les équivalences*

i. *f est réelle.*

ii. *La matrice de f dans des bases réelles est réelle.*

iii. *$f = \mathrm{conj}(f)$.*

Démonstration. Soient $e = (e_j\,;\, j \in J)$ et $\varepsilon = (\varepsilon_i\,;\, i \in I)$ des bases réelles de G_1 et G_2 et $(a_{ij}\,;\, i \in I, j \in J)$ la matrice de f dans les bases e et ε. On suppose (i). Dans ce cas pour tout $j \in J$, $f(e_j) \in R_2$, et donc pour tout $i \in I$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Nous avons prouvé que (i) implique (ii). Supposons (ii). Alors tous les a_{ij} sont réels et

$$\begin{aligned}\bar{f}\,(e_j) &= \mathrm{conj}(f(\bar{e_j}))\\ &= \mathrm{conj}(f(e_j))\\ &= \mathrm{conj}\left(\sum_{i \in I} a_{ij}\,\varepsilon_i\right)\\ &= \sum_{i \in I} \overline{a_{ij}}\,\bar{\varepsilon_i}\\ &= \sum_{i \in I} a_{ij}\,\varepsilon_i\\ &= f(e_j)\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathrm{conj}(f) = f$. Nous avons prouvé que (ii) implique (iii). Supposons (iii). Soit u un élément réel de G_1. Montrons que $f(u) = \mathrm{conj}(f(u))$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{conj}(f(u)) &= \mathrm{conj}(f(\mathrm{conj}(u)))\\ &= \bar{f}\,(u)\\ &= f(u)\end{aligned}$$

Nous avons prouvé que $f(u)$ est réel, et donc (iii) implique (i). □

5 Valeurs propres d'un endomorphisme réel

On commence par une propriété féconde :

Proposition 44. *Soient (G, R) un espace réel-complexe, $\varphi\colon G \to G$ une application $\mathbb{C}$-linéaire et e un vecteur propre de φ associé à une valeur propre z. Alors $\bar{e}$ est un vecteur propre de $\bar{\varphi}$ associé à la valeur propre $\bar{z}$.*

Démonstration. On a

$$
\begin{aligned}
\bar{\varphi}(\bar{e}\,) &= \overline{\varphi(\bar{\bar{e}}\,)} \\
&= \overline{\varphi(e)} \\
&= \overline{z e} \\
&= \bar{z}\,\bar{e}
\end{aligned}
$$

□

On en déduit la

Proposition 45. *Soient* (G, R) *un espace réel-complexe,* $\varphi\colon G \to G$ *une application* $\mathbb{C}$*-linéaire réelle et* e *un vecteur propre de* φ *associé à une valeur propre* z*. Alors* $\bar{e}$ *est un vecteur propre de* φ *associé à la valeur propre* $\bar{z}$*.*

6 Première application : classification des endomorphismes du plan

On reprend la situation étudiée à la section 1 : E est un plan vectoriel réel de base $e = (e_1, e_2)$ et f est un endomorphisme de E de valeurs propres les nombres complexes $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. On note comme d'habitude $f_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de f. Puisque f et $f_{\mathbb{C}}$ possèdent la même matrice dans e, ils possèdent les mêmes « spectres complexes ». On en déduit l'existence d'une $\mathbb{C}$-base $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $E_{\mathbb{C}}$ dans laquelle la matrice de $f_{\mathbb{C}}$ est la diagonale

$$\underset{\varepsilon}{\mathrm{mat}}\, f_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix}$$

On a

$$f_{\mathbb{C}}(\varepsilon_1) = (\alpha - i\beta)\,\varepsilon_1$$

On en déduit, puisque $f_{\mathbb{C}}$ est réelle, que

$$f_{\mathbb{C}}(\bar{\varepsilon_1}) = (\alpha + i\beta)\,\bar{\varepsilon_1}$$

autrement dit que $\bar{\varepsilon_1}$ est un vecteur propre de $f_{\mathbb{C}}$ associé à $\alpha + i\beta$. Ainsi $(\varepsilon_1, \bar{\varepsilon_1})$ est une $\mathbb{C}$-base de $E_{\mathbb{C}}$ (une $\mathbb{C}$-base propre de $f_{\mathbb{C}}$) et la matrice de $f_{\mathbb{C}}$ dans cette base est

$$\underset{(\varepsilon_1, \overline{\varepsilon_1})}{\mathrm{mat}}\, f_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix}$$

Notons u la partie réelle de ε_1 et v sa partie imaginaire :

$$\varepsilon_1 = u + i v$$

Alors nous savons d'après la proposition 36 que (u, v) est une base réelle de $E_{\mathbb{C}}$ (et donc une base de E). De

$$\begin{cases} f_{\mathbb{C}}(u + i v) = f(u) + i\, f(v) \\ f_{\mathbb{C}}(u + i v) = (\alpha - i\beta)\,(u + i v) = (\alpha u - \beta v) + i\,(\beta u + \alpha v) \end{cases}$$

on déduit

$$\begin{cases} f(u) = \alpha u + \beta v \\ f(v) = -\beta u + \alpha v \end{cases}$$

c'est à dire

$$\underset{(u,v)}{\mathrm{mat}}\, f = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Si on note

$$\alpha + i\beta = r e^{i\theta}$$

on obtient

$$\underset{(u,v)}{\mathrm{mat}}\, f = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que f est la composée de la rotation elliptique d'angle θ et de l'homothétie de rapport r. On trouve la classification complète des endomorphismes du plan dans [1].

7 Deuxième application : diagonalisation des matrices symétriques réelles

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$. On dit que f est auto-adjoint s'il possède une matrice symétrique dans une base orthonormée, c'est à dire si pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

C'est grâce à cette notion que l'on peut démontrer l'item 2 du théorème ci-dessous :

Théorème 46. *(théorème spectral)*

1. *Version en termes d'endomorphismes. Tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien possède une base propre orthonormée.*
2. *Version en termes de matrices. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors il existe une matrice diagonale D et $P \in O(n, \mathbb{R})$ telles que*

$$A = PDP^t$$

Notons n la dimension de E. Pour démontrer que f possède une base propre orthonormée, il suffit de se donner un vecteur propre u de f, de valeur propre associée λ

$$f(u) = \lambda u$$

et de considérer l'othogonale F de u :

$$F = \{x \in E ; \langle x, u\rangle = 0\}$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. On montre alors facilement que

$$f(F) \subset F$$

et donc la restriction $f_{|F}$ est un endomorphisme auto-adjoint de F. On a donc réduit le problème au cas de $f_{|F}$. On a baissé la dimension d'un cran. Le lecteur aura compris qu'une récurrence sur n, la dimension de E permet d'écrire la preuve du théorème. Sauf qu'il y a un problème. Comment être sûr que f possède au moins une valeur propre λ ? C'est là toute la difficulté, et c'est là qu'entrent en jeu $E_{\mathbb{C}}$ et $f_{\mathbb{C}}$, les complexifiés de E et f.

Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, le polynome caractéristique de $f_{\mathbb{C}}$ est scindé sur $\mathbb{C}$, et donc $f_{\mathbb{C}}$ possède au moins une valeur propre z. Notons u le vecteur propre associé. On montre facilement que $f_{\mathbb{C}}$ est autoadjoint, et donc

$$\langle f(u), u\rangle = \langle u, f(u)\rangle$$

c'est à dire

$$\bar{z}\ \|u\|^2 = z\ \|u\|^2$$

d'où

$$\bar{z} = z$$

ce qui signifie que z est réelle. Nous avons prouvé grâce à $f_{\mathbb{C}}$ que f possède au moins une valaur propre. On trouvera dans [2] la diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints, hermitiens et normaux.

8 Troisième application : suites définies par une relation de récurrence

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose $a \neq 0$ et on cherche les suites réelles vérifiant la relation de récurrence d'ordre 2

$$a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0 \tag{5}$$

Cette relation étant linéaire, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 47. *L'espace $\mathcal{S}$ des solutions de (5) est de dimension 2.*

Démonstration. Tout élément u de $\mathcal{S}$ est déterminé par ses deux premiers termes u_0 et u_1. En effet

$$u_2 = \frac{-bu_1 - cu_0}{a}$$

$$u_3 = \frac{-bu_2 - cu_1}{a}$$

etc. Il est facile de voir que

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

est bijective. On laisse au lecteur le soin de montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme d'espaces vectoriels. □

Les suites géométriques de raison q vérifient par définition une relation de récurrence d'ordre 1 :

$$u_{n+1} - qu_n = 0$$

ce qui nous donne l'idée de chercher du côté de ces suites là. Posons donc

$$u_n = q^n$$

en supposant que $q \neq 0$. La suite u ainsi définie est solution de (5) si et seulement si

$$aq^{n+2} + bq^{n+1} + cq^n = 0$$

c'est à dire

$$aq^2 + bq + c = 0$$

Cette équation s'appelle « équation caractéristique » associée à (5). Son discriminant est

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$, on trouve deux solutions réelles, q_1 et q_2 et donc toute suite de la forme

$$u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$$

est solution. Etant donné que $\dim \mathcal{S} = 2$, nous avons prouvé que

$$\mathcal{S} = \{\lambda u + \mu v; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

où $u = (q_1^n)$ et $v = (q_2^n)$.

Exercice 2. Vérifier que (u, v) est libre.

Si $\Delta = 0$, on trouve une solution réelle double q_0 et donc les suites (λq_0^n) sont solution. Il nous en faudrait une de plus pour avoir $\mathcal{S}$ tout entier. Pour la trouver on pose

$$u_n = \lambda_n q_0^n$$

c'est la méthode de la « variation de la constante ». Cette suite est solution de l'équation si et seulement si

$$a\lambda_{n+2} q_0^2 + b\lambda_{n+1} q_0 + c\lambda_n = 0 \tag{6}$$

Or le polynome caractéristique est égal à

$$aX^2 + bX + c = a(X - q_0)^2$$

autrement dit nous avons l'identité

$$aX^2 + bX + c = aX^2 - 2aq_0 X + aq_0^2$$

Par identification nous obtenons que les coefficients de (6) sont égaux à

$$\begin{cases} aq_0^2 = c \\ bq_0 = -2aq_0^2 = -2c \\ c \end{cases}$$

et (6) s'écrit

$$c\lambda_{n+2} - 2c\lambda_{n+1} + c\lambda_n = 0$$

c'est à dire

$$\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1} = \lambda_{n+1} - \lambda_n$$

ce qui signifie que l'écart entre deux termes est constants. Ceci signifie que λ est une suite arithmétique :

$$\lambda_n = \lambda + n\mu$$

On a montré que toute suite de la forme

$$(\lambda + n\mu)\, q_0^n$$

est solution. Etant donné la dimension de $\mathcal{S}$, on a

$$\mathcal{S} = \{\lambda u + \mu v ; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

avec $u = (q_0^n)$ et $v = (n q_0^n)$.

Exercice 3. Vérifier que (u, v) est libre.

C'est dans le cas où $\Delta < 0$ que nous avons besoin de complexifier $\mathcal{S}$. Il est clair que le compléxifié $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à l'espace des suites complexes vérifiant (5). Ainsi, si $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ sont les solutions de l'équation caractéristique, alors

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \{\lambda u + \mu \bar{u} ; \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$$

où

$$u = (\rho^n e^{i n\theta})$$

Exercice 4. Vérifier que $(u, \bar{u})$ est $\mathbb{C}$-libre.

Ainsi $(u, \bar{u})$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$. D'après la proposition 36, $(r(u), \jmath(u))$ est une base réelle de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$, et on a

$$r(u) = (\rho^n \cos n\theta)$$

et

$$\jmath(u) = (\rho^n \sin n\theta)$$

On en déduit que

$$\mathcal{S} = \{\lambda c + \mu s ; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

avec $c = (\rho^n \cos n\theta)$ et $s = (\rho^n \sin n\theta)$.

9 Quatrième application : équations différentielles

On considère l'équation différentielle

$$a y'' + b y' + c y = 0 \tag{7}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose que $a \neq 0$. L'inconnue y désigne une fonction définie sur l'intervalle le plus grand possible. On démontre grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz que les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ tout entier et qu'elles forment un espace vectoriel $\mathcal{S}$ de dimension 2.

L'astuce pour résoudre (7) est de chercher les solutions de la forme

$$f : x \longmapsto e^{\lambda x}$$

On voit que f est solution si et seulement

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Cette équation s'appelle l'équation caractéristique associée à (7). On note Δ son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions et on trouve deux solutions de (7) linéairement indépendantes.

Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une solution double r_0. Cela nous donne la moitié des solutions, à savoir les fonctions $x \mapsto k e^{r_0 x}$. C'est embêtant. On s'inspire de l'astuce utilisée à la section précèdente en posant

$$f(x) = k(x)\, e^{r_0 x}$$

grâce à la relation $b = -2ar$, on trouve après un long calcul que f est solution si et seulement si

$$ak'' = 0$$

c'est à dire s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$k(x) = \lambda x + \mu$$

Les solutions sont donc les fonctions $(\lambda x + \mu)\, e^{r_0 x}$.

Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes $\alpha \pm i\beta$. On complexifie $\mathcal{S}$. Il est clair que $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à l'espace des fonctions complexes solutions de l'équation (7). On pose

$$f(x) = e^{(\alpha + i\beta)\, x}$$

On montre facilement que $(f, \bar{f})$ est libre et donc est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$. Il s'ensuit que $(r(f), \jmath(f))$ est une base réelle de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}$. On trouve

$$r(f) \colon x \longmapsto e^{\alpha x} \cos \beta x$$

et

$$\jmath(f) \colon x \longmapsto e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ce qui permet de conclure.

10 Cinquième application : séries de Fourier

Une fonction de Dirichlet est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, 2π-périodique, possèdant un nombre fini de discontinuités dans une période, possédant une limite à gauche et à droite en chaque point de discontinuité et valant la moyenne de ces deux limites en chacun de ces point. L'ensemble de ces fonctions est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{D}$ que l'on munit du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

On montre facilement que la famille $(e_n\, ; n \in \mathbb{N})$ définie par

$$e_n(x) = e^{inx}$$

est orthonormée, ce qui permet de définir les coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{D}$ par

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$$

On aimerait faire la même chose dans l'espace $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ des fonctions de Dirichlet à valeurs réelles. L'espace $\mathcal{D}$ est isomorphe à la complexification de $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$. Par conséquent, chercher une famille intéressante dans $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ équivaut à chercher une famille réelle dans $\mathcal{D}$. Il se trouve que chaque e_n est conjugué à e_{-n}. Ceci nous donne l'idée de regarder les c_n, s_n où

$$\begin{cases} c_n = r(e_n) \\ s_n = \jmath(e_n) \end{cases}$$

On trouve

$$c_n\colon x \mapsto \cos n x$$

et

$$s_n\colon x \mapsto \sin n x$$

La famille des c_n, s_n est forcément libre mais il y a mieux : le fait que $(e_n\,; n \in \mathbb{Z})$ soit orthonormée entraîne que $(c_k, s_\ell\,; k \in \mathbb{N}, \ell \in \mathbb{N}^*)$ est orthogonale. Pour s'en convainvcre il suffit de reprendre la démonstration de la proposition 39. On peut donc définir des coefficients de Fourier avec cette famille. Ces coefficients sont plus pertinents pour les fonctions réelles.

On pourra consulter [3] pour approfondir la question.

On peut généraliser la situation que nous venons de rencontrer. Si E est un espace préhilbertien réel de fonctions où le produit scalaire ressemble à

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)\, g(x)\, dx$$

On munit le complexifié $E_{\mathbb{C}}$ du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

On vérifie facilement au cas par cas que ceci donne un produit scalaire. Ceci ressemble à ce qui est fait dans la proposition 21.

11 Conclusion

Les problèmes sur les suites récurrentes, les équations différentielles et les séries de Fourier peuvent être résolus sans introduire la notion d'espace réel-complexe. Il suffit de procéder au cas par cas, de manière concrète. On notera d'ailleurs que c'est ainsi qu'on procède dans un cours de mathématiques, ce qui n'est pas plus mal du point de vue pédagogique : inutile d'ajouter des difficultés à des choses qui sont assez compliquées pour les jeunes étudiants. Ceci étant dit, il paraît intéressant de revenir à ces problèmes avec un regard plus vertical et profond. C'est tout l'intérêt de cet article : essayer de voir ce qui fait fonctionner ce passage aux nombres complexes, et montrer pourquoi ces résolutions ont le même parfum alors qu'elles opèrent dans des domaines différents. Un autre intérêt est la classification des endomorphismes du plan, et la diagonalisation des endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien. Il semblerait que les structures réelle-complexes soient incontournables si on souhaite écrire les choses de manière précise et convaincante.

Bibliographie

[1] Richard Gomez. Classification des endomorphismes du plan. *MégaMaths site web*, , 2007. Http://megamaths.perso.neuf.fr/rg.

[2] Richard Gomez. Diagonalisation des matrices symétriques. *MégaMaths site web*, , 2007. Http://megamaths.perso.neuf.fr/rg.

[3] Richard Gomez. *Séries de Fourier, cours et exercices corrigés*. À paraître, 2012. Http://megamaths.perso.neuf.fr/rg.

[4] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire, 2ème édition*. Cèpadués edition, 2002.